# ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ. РЕЗОНАНС

## Введение

Рассмотрим последовательный колебательный контур (рисунок 1), состоящий из последовательно соединенных емкости C, индуктивности $L$ и резистора R. Контур подключен к генератору, выходное напряжение которого меняется со временем по гармоническому закону с частотой $\omega$: $U(t) = U_m \cos\omega t$

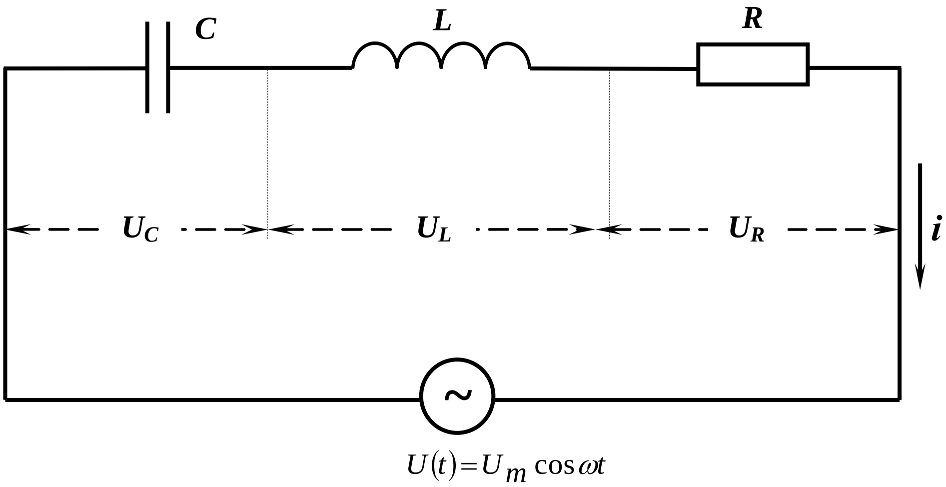


Рисунок 1. Последовательный колебательный контур

Для анализа процессов в контуре применим закон Ома

$$i(t) = \frac{U(t)}{R}.$$

С учетом ЭДС самоиндукции в катушке и разности потенциалов на конденсаторе:

$$U_L + U_R + U_C = U(t) \qquad (1)$$

В этом случае закон Ома принимает вид:

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \qquad \text{или} \qquad I_m = \frac{U_m}{Z}, \quad \text{где} \qquad (2)$$

$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ - полное сопротивление контура (импеданс),

$X_L = \omega L$ – индуктивное сопротивление,

$X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ – емкостное сопротивление.

Из формулы (2) видно, что амплитуда силы тока в контуре зависит от частоты генератора:

$$I_m = I_m(\omega)$$

Эта зависимость называется амплитудно-частотной характеристикой контура (АЧХ). Полное сопротивление контура будет минимальным при условии

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

В этом случае полное сопротивление $Z = R$, а амплитуда силы тока в контуре будет максимальна. В этом случае говорят, что имеет место резонанс. Резонансная частота (частота, при которой достигается максимум силы тока), определяется из этого условия и равна

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{3}$$

Отсюда видно, что резонансная частота для тока совпадает с частотой собственных колебаний в контуре.

Р***езонансом называется явление резкого возрастания амплитуды при приближении частоты вынужденных колебаний к частоте собственных колебаний системы.***

При отклонении частоты генератора от резонансной частоты амплитуда силы тока уменьшается и обращается в нуль как при $\omega = 0$, так и при $\omega \to \infty$. На рисунке 2 показана амплитудно-частотная характеристика $I_m(\omega)$, называемая резонансной кривой.

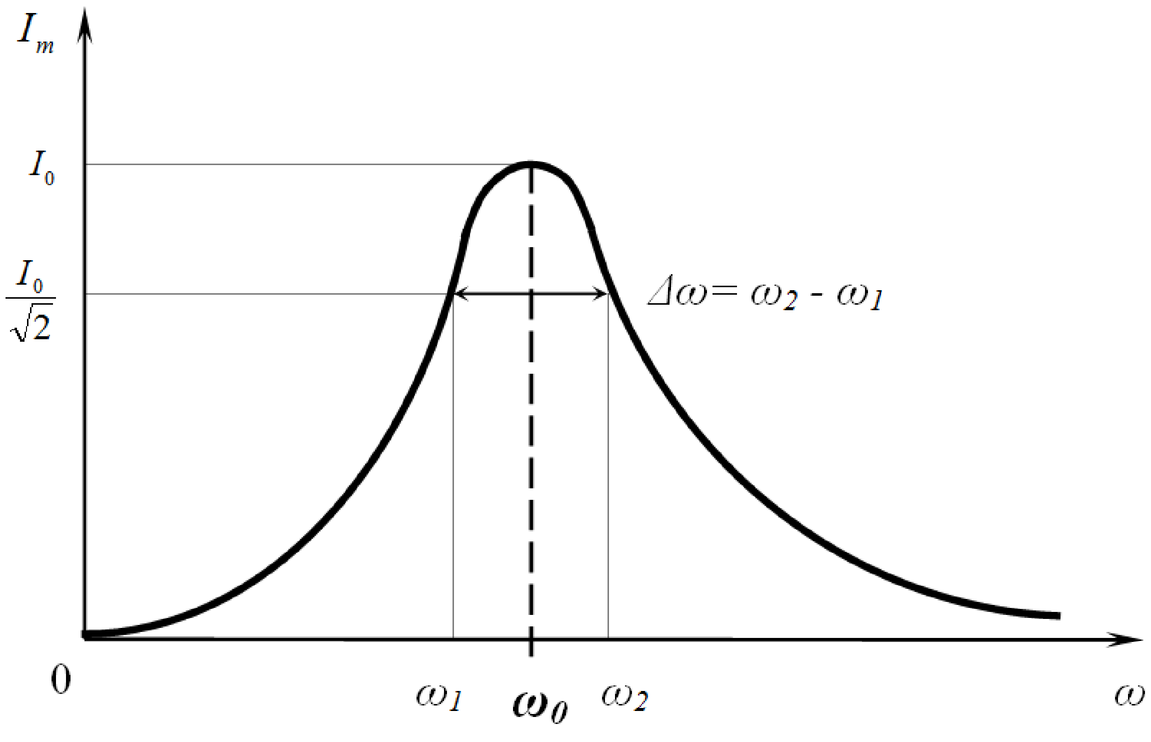


Рисунок 2. Амплитудно-частотная характеристика контура – АЧХ

***Ширина резонансной кривой*** (***полоса пропускания***) $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ или $\Delta f = f_2 - f_1$ оценивает остроту резонанса. Ее измеряют на уровне $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$, то есть на уровне 0,707 от максимального значения амплитуды силы тока $I_0$ при резонансе.

***Добротность контура*** характеризует «качество» контура. Она показывает, во сколько раз запасенная реактивная энергия контура больше, чем потери энергии за один период. Она определяет ширину резонансной кривой.

***Добротность контура Q – это безразмерная величина, равная отношению резонансной частоты к полосе пропускания***:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad \text{или} \quad Q = \frac{f_0}{\Delta f} \tag{4}$$

Чем острее резонансная кривая, тем больше добротность контура.

Найдем связь между добротностью $Q$ и параметрами контура *R*, *L* и *C*. Значение частот $\omega_1$ и $\omega_2$, при которых амплитуда тока $I_m(\omega) = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$, то есть $I_m(\omega)$ составляет 0,707 от максимального значения амплитуды в резонансе, найдем из закона Ома (уравнение 2).

При резонансе $Z = R$, а значит $I_0 = \frac{U_m}{R}$. При $\omega_1$ и $\omega_2$ $I_m = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$. Значит

$$\frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U_m}{R\sqrt{2}}$$

Отсюда $R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = 2R^2$ или $R^2 = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2$.

Это биквадратное уравнение можно разделить на два квадратных уравнения

$$R = \frac{1}{\omega C} - \omega L \quad \text{и} \quad R = \omega L - \frac{1}{\omega C}.$$

Положительные корни этих уравнений равны:

$$\omega_1 = \frac{-R + \sqrt{R^2 + 4\frac{L}{C}}}{2L} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \frac{+R + \sqrt{R^2 + 4\frac{L}{C}}}{2L}.$$

Тогда ширина резонансной кривой равна:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} = \omega_0 R\sqrt{\frac{C}{L}}, \tag{5}$$

отсюда добротность

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}. \tag{6}$$

Отсюда следует, что чем меньше активное сопротивление контура **R**, тем больше его добротность и острее резонансная кривая.

Добротность контура можно выразить через логарифмический декремент затухания колебательного контура $\lambda$.

$$\lambda = \beta T_0, \quad \text{где}$$

$\beta = \dfrac{R}{2L}$ – коэффициент затухания,

$T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ – период собственных колебаний

Подставляя эти значения, получаем $\lambda = \dfrac{\pi R}{\omega_0 L}$.

Используя (5) и (6), находим:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} \qquad\qquad Q = \pi \cdot N_e.$$

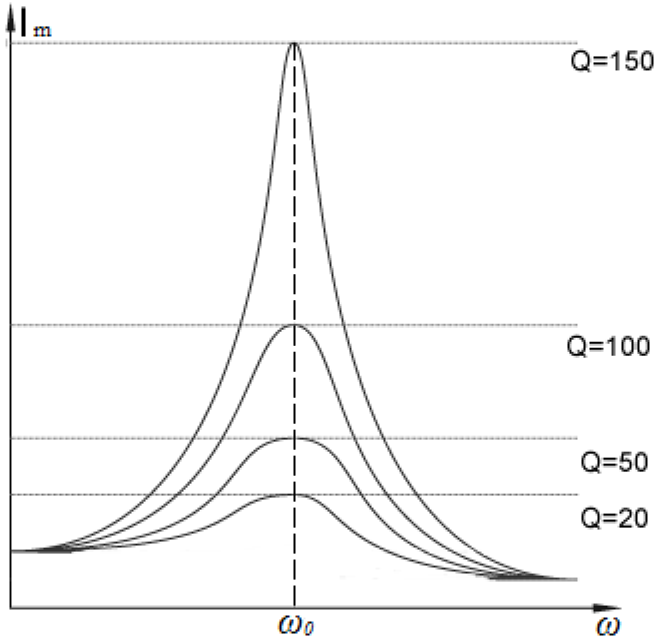


Рисунок. 3 Амплитудно-частотная характеристика контура

Таким образом, добротность равна числу свободных затухающих колебаний, за которое амплитуда $I_m$ упадёт в $e$ раз.